Derivabilidad. Aplicaciones

V.M. Jiménez

Universidad de Alcalá (UAH)

Máximos y mínimo relativos

Es MUY IMPORTANTE recordar la noción de **distancia**. Para dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = ||x-y||$$

Máximos y mínimo relativos

Es MUY IMPORTANTE recordar la noción de **distancia**. Para dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = ||x-y||$$

¡OJO! Estamos usando el **producto escalar usual** (suma del producto de la componentes).

Máximos y mínimo relativos

Es MUY IMPORTANTE recordar la noción de **distancia**. Para dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = ||x - y||$$

¡OJO! Estamos usando el **producto escalar usual** (suma del producto de la componentes).

Así, para un valor $\delta > 0$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos la **bola abierta de centro x_0 y radio δ**, como el siguiente conjunto

$$B_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x_0, y) < \delta\}$$

Máximos y mínimo relativos

- Si $n = 1$, ¿Qué es la $B_\delta(x_0)$?

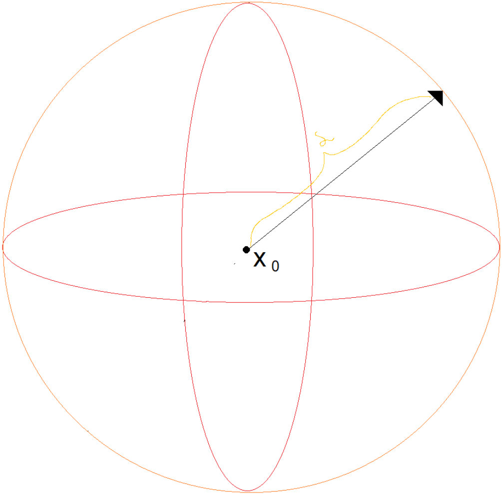
Máximos y mínimo relativos

- Si $n = 1$, ¿Qué es la $B_\delta\left(x_0\right)$?
- Si $n = 2$, ¿Qué es la $B_\delta\left(x_0\right)$?

Máximos y mínimo relativos

- Si $n = 1$, ¿Qué es la $B_\delta(x_0)$?
- Si $n = 2$, ¿Qué es la $B_\delta(x_0)$?
- Si $n = 3$, ¿Qué es la $B_\delta(x_0)$?

Máximos y mínimo relativos



Máximos y mínimo relativos

Definición

Sea $f : C \to \mathbb{R}$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in B_\delta(a)$ para algún $\delta > 0$.

Máximos y mínimo relativos

Definición

Sea $f : C \to \mathbb{R}$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in B_\delta(a)$ para algún $\delta > 0$.

Se dice que f tiene un **máximo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in C$.

Definición

Sea $f : C \to \mathbb{R}$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **mínimo relativo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in B_\delta(a)$ para algún $\delta > 0$.

Máximos y mínimo relativos

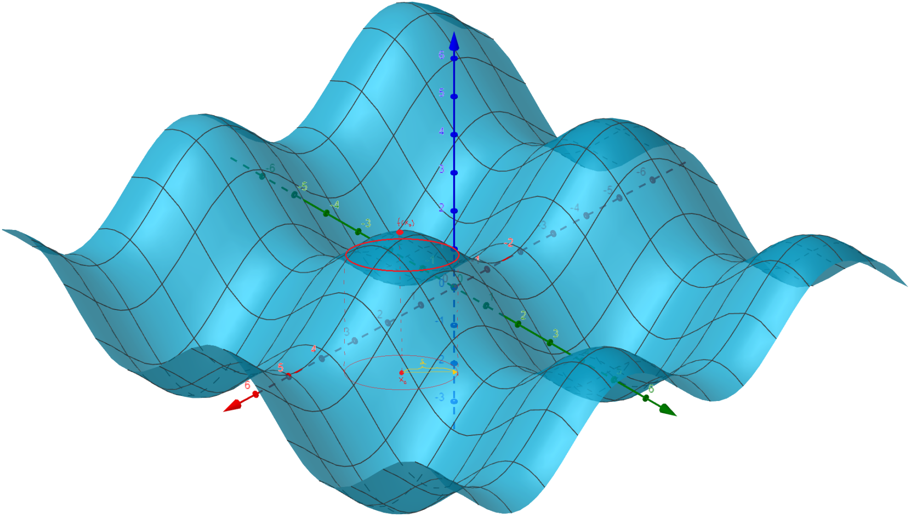
Definición

Sea $f : C \to \mathbb{R}$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **máximo relativo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in B_\delta(a)$ para algún $\delta > 0$.
Se dice que f tiene un **máximo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in C$.

Definición

Sea $f : C \to \mathbb{R}$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un **mínimo relativo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in B_\delta(a)$ para algún $\delta > 0$.
Se dice que f tiene un **mínimo en $a \in C$** si se verifica que $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in C$. Un **extremo relativo** es un máximo relativo o un mínimo relativo.

Máximos y mínimo relativos



Máximos y mínimo relativos

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que un punto $x_0 \in I$ es un **punto crítico** si, o bien f no es derivable en x_0, o $f^{'}(x_0) = 0$.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Todo extremo relativo es un punto crítico.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Todo extremo relativo es un punto crítico.

Así, para buscar extremos relativo tenemos que encontrar todos los puntos de no derivabilidad y aquellos cuya derivada exosta pero sea 0.

Máximos y mínimo relativos

Ejercicio

Hallar los extremos (relativo o no) de las siguientes funciones:

- $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$
- $f : [-1, 8] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$$

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, una función derivable en todo el intervalo I:

- **f es estrictamente creciente** si $f' > 0$ en todo I.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, una función derivable en todo el intervalo I:

- **f es estrictamente creciente** si $f' > 0$ en todo I.
- **f es estrictamente decreciente** si $f' < 0$ en todo I.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, una función derivable en todo el intervalo I:

- **f es estrictamente creciente** si $f' > 0$ en todo I.
- **f es estrictamente decreciente** si $f' < 0$ en todo I.
- **f es constante** si $f' = 0$ en todo I.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, una función derivable en todo el intervalo I:

- **f es estrictamente creciente** si $f^{'} > 0$ en todo I.
- **f es estrictamente decreciente** si $f^{'} < 0$ en todo I.
- **f es constante** si $f^{'} = 0$ en todo I.

¿Cuándo es f creciente?

Máximos y mínimo relativos

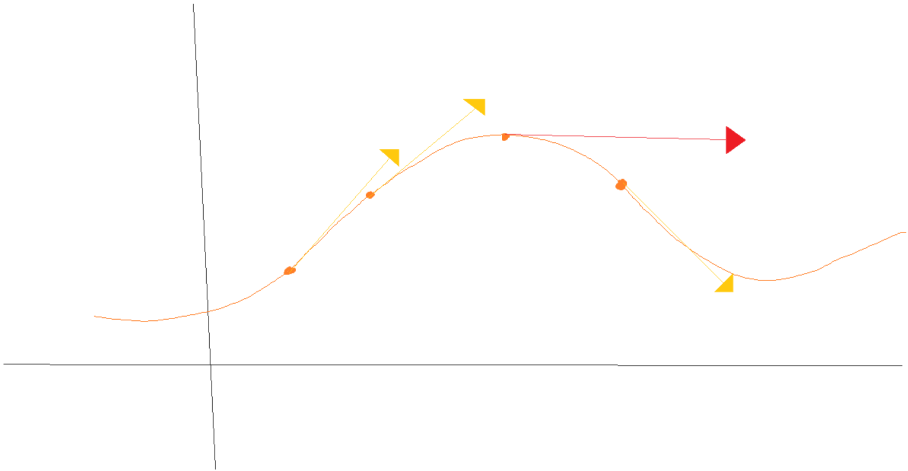
Teorema

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, una función derivable en todo el intervalo I:

- **f es estrictamente creciente** si $f^{'} > 0$ en todo I.
- **f es estrictamente decreciente** si $f^{'} < 0$ en todo I.
- **f es constante** si $f^{'} = 0$ en todo I.

¿Cuándo es f creciente? ¿Cuándo es f decreciente?

Máximos y mínimo relativos



Máximos y mínimo relativos

Criterio de la primera derivada

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Supongamos que f es derivable en todo un intervalo que contiene a x_0 (quizá más pequeño que I) salvo en el x_0 (que puede serlo o no).

Máximos y mínimo relativos

Criterio de la primera derivada

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Supongamos que f es derivable en todo un intervalo que contiene a x_0 (quizá más pequeño que I) salvo en el x_0 (que puede serlo o no).
Entonces, si $f^{'}(x)$ cambia de positiva a negativa en x_0, tenemos en x_0 un máximo relativo. Por otro lado, si $f^{'}(x)$ cambia de negativa a positiva en x_0, tenemos en x_0 un mínimo relativo.

Máximos y mínimo relativos

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I. Diremos que f es **cóncava** en I, si $f^{'}$ es estrictamente creciente en I.

Máximos y mínimo relativos

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I. Diremos que f es **cóncava** en I, si $f^{'}$ es estrictamente creciente en I. Diremos que f es **convexa** en I, si $f^{'}$ es estrictamente decreciente en I.

Máximos y mínimo relativos

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I. Diremos que f es **cóncava** en I, si $f^{'}$ es estrictamente creciente en I. Diremos que f es **convexa** en I, si $f^{'}$ es estrictamente decreciente en I. Un **punto de inflexión** es un valor de la gráfica $(x_0, f(x_0))$ en el que se produce un cambio de concavidad a convexidad.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I con f' derivable en todo I:

- f es cóncava en I si $f'' > 0$ en todo I.
- f es convexa en I si $f'' < 0$ en todo I.

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I con f' derivable en todo I:

- f es cóncava en I si $f'' > 0$ en todo I.
- f es convexa en I si $f'' < 0$ en todo I.

¿Qué ocurre cuando f tiene un punto de inflexión?

Máximos y mínimo relativos

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I con f' derivable en todo I:

- f es cóncava en I si $f'' > 0$ en todo I.
- f es convexa en I si $f'' < 0$ en todo I.

¿Qué ocurre cuando f tiene un punto de inflexión?

¡$f'' = 0$!

Máximos y mínimo relativos

Criterio de concavidad y convexidad

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervalo de $\mathbb{R}$, derivable en todo I con $f^{'}$ derivable en todo I. Supongamos que $f^{'}(x_0) = 0$ en un $x_0 \in I$. Entonces,

- Si f es cóncava $(f^{''} > 0)$, x_0 es un mínimo relativo.
- Si f es convexa $(f^{''} > 0)$, x_0 es un máximo relativo.